ΛΥΣΕΙΣ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ 2002

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 105

Β. α. Λ , β. Σ , γ. Σ , δ. Λ , ε. Λ

ΘΕΜΑ 2ο

α .

Η f προφανώς είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{(e^x-1)'(e^x+1)-(e^x+1)'(e^x-1)}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} > 0$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα άρα '1—1' οπότε αντιστρέφεται

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-1}{e^x+1} = \frac{0-1}{0+1} = -1 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{e^x+1} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x-1)'}{(e^x+1)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x} = 1$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A) = (-1,\ 1)$

Για κάθε $y\in(-1,\ 1)$ έχω $y = f(x) \Leftrightarrow y = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

$$ye^x + y = e^x - 1$$
$$ye^x - e^x = -y - 1$$
$$(1-y)e^x = y + 1$$
$$e^x = \frac{y+1}{1-y} \overset{*}{\Leftrightarrow} x = \ln\frac{y+1}{1-y}$$

* Επειδή $y\in(-1,\ 1)$, είναι $\dfrac{y+1}{1-y} > 0$

Άρα $f^{-1}: (-1,\ 1)\to\mathbb{R}$ με $f^{-1}(x) = \ln\dfrac{x+1}{1-x}$

β.

$$f^{-1}(x) = 0 \Leftrightarrow \ln\frac{x+1}{1-x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{1-x} = 1 \Leftrightarrow x + 1 = 1 - x \Leftrightarrow x = 0$$

γ.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f^{-1}(x)dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\ln\frac{1+x}{1-x}dx = \left[x\ln\frac{1+x}{1-x}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'dx$$

$$= 0 - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{2}{(1-x)^2}dx$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} -\frac{2x}{1-x^2}\,dx$$

$$=\left[\ln|1-x^2|\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \ln\frac{3}{4} - \ln\frac{3}{4} = 0$$

ΘΕΜΑ 3ο

α .

$$f(x) = \frac{|x-z|^2 - |x+\overline{z}|^2}{x^2+|z|^2} = \frac{(x-z)(x-\overline{z})-(x+\overline{z})(x+z)}{x^2+|z|^2}$$

$$= \frac{x^2 - x\overline{z} - zx + z\overline{z} - x^2 - xz - x\overline{z} - \overline{z}z}{x^2+|z|^2}$$

$$= \frac{-2x\overline{z} - 2zx}{x^2+|z|^2}$$

$$= \frac{-2x(\overline{z}+z)}{x^2+|z|^2}$$

$$= \frac{-4\alpha x}{x^2+|z|^2}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-4\alpha x}{x^2+|z|^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-4\alpha x}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-4\alpha}{x} = 0$$

β.

$$f\,'(x) = \frac{-4\alpha(x^2+|z|^2)-2x(-4\alpha x)}{\left(x^2+|z|^2\right)^2} = \frac{-4\alpha x^2 - 4\alpha|z|^2 + 8\alpha x^2}{\left(x^2+|z|^2\right)^2}$$

$$= \frac{4\alpha x^2 - 4\alpha|z|^2}{\left(x^2+|z|^2\right)^2}$$

$$= \frac{4\alpha(x^2-|z|^2)}{\left(x^2+|z|^2\right)^2}$$

$f\,'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 4\alpha x^2 - 4\alpha|z|^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -|z|$ ή $x = |z|$ δεδομένου ότι $\alpha \neq 0$

Δίνεται ότι $|z+1| > |z-1| \;\Leftrightarrow\; |\alpha+\beta i+1| > |\alpha+\beta i-1| \;\Leftrightarrow$

$$\sqrt{(\alpha+1)^2+\beta^2} > \sqrt{(\alpha-1)^2+\beta^2}$$

$$\alpha^2+2\alpha+1+\beta^2 > \alpha^2-2\alpha+1+\beta^2$$

$$\alpha > 0$$

Πρόσημο της $f\,'$ και μονοτονία της f

x	$-\infty$		$-\lvert z\rvert$		$\lvert z\rvert$		$+\infty$
$f\,'$		+	0	−	0	+	
f		↗		↘		↗	

Παρατηρούμε ότι η f παρουσιάζει τ. μέγιστο για $x = -|z|$ το $f(-|z|) = \dfrac{2\alpha}{|z|}$

και τ. ελάχιστο για $x = |z|$ το $f(|z|) = -\dfrac{2\alpha}{|z|}$

γ.

Αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$,με βάση τα προηγούμενα ερωτήματα το σύνολο τιμών είναι το

$$f(A) = \left(0,\ \frac{2\alpha}{|z|}\right] \cup \left[-\frac{2\alpha}{|z|},\ \frac{2\alpha}{|z|}\right] \cup \left[-\frac{2\alpha}{|z|},\ 0\right) = \left[-\frac{2\alpha}{|z|},\ \frac{2\alpha}{|z|}\right]$$

- Όταν $x \in (-\infty,\ -|z|]$, το σύνολο τιμών είναι το $\left(0,\ \dfrac{2\alpha}{|z|}\right]$ στο οποίο δεν ανήκει το 0 , άρα η f δεν έχει ρίζα στο $(-\infty,\ -|z|]$
- Όταν $x \in (-|z|,\ |z|)$, το σύνολο τιμών είναι το $\left[-\dfrac{2\alpha}{|z|},\ \dfrac{2\alpha}{|z|}\right]$ στο οποίο ανήκει το 0 , άρα η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-|z|,\ |z|)$.
  Και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα , η ρίζα είναι μοναδική.

- Όταν $x \in [|z|,\ +\infty)$, το σύνολο τιμών είναι το $\left[-\dfrac{2\alpha}{|z|},\ 0\right)$ στο οποίο δεν ανήκειει το 0, άρα η f δεν έχει ρίζα στο $[|z|,\ +\infty)$

ΘΕΜΑ 4ο

α .

$$f''(x)f(x) + (f'(x))^2 = f(x)f'(x) \Rightarrow [f'(x)f(x)]' = \left(\frac{f^2(x)}{2}\right)'$$

$$f'(x)f(x) = \frac{f^2(x)}{2} + c$$

Για $x = 0$ έχουμε $f'(0)f(0) = \dfrac{f^2(0)}{2} + c$ και λόγω της υπόθεσης $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} + c \Leftrightarrow$

$$c = 0$$

Άρα $f'(x)f(x) = \dfrac{f^2(x)}{2} \Leftrightarrow f'(x)f(x) - \dfrac{f^2(x)}{2} = 0$

$$f(x)\left[f'(x) - \frac{f(x)}{2}\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = 0 \quad \text{ή} \quad f'(x) - \frac{f(x)}{2} = 0$$

Η $f(x) = 0$ απορρίπτεται , διότι για $x = 0$ θα είχαμε $f(0) = 0$ άτοπο λόγω της υπόθεσης.

Άρα $f'(x) - \dfrac{f(x)}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2f'(x) - f(x) = 0$

$$e^{-\frac{x}{2}} f'(x) - e^{-\frac{x}{2}} f(x) = 0$$

$$\left(e^{-\frac{x}{2}} f(x)\right)' = 0$$

$$e^{-\frac{x}{2}} f(x) = c \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Για x = 0 έχουμε $f(0) = c \Leftrightarrow c = 1$, άρα $e^{-\frac{x}{2}} f(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = e^{\frac{x}{2}} = \sqrt{e^x}$

β.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = 2x - \int_0^x \dfrac{g(t)}{1+f^2(t)}dt - 1$

$$= 2x - \int_0^x \frac{g(t)}{1+(\sqrt{e^t})^2}dt - 1$$

$$= 2x - \int_0^x \frac{g(t)}{1+e^t}dt - 1$$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο [0, 1] άρα και η $\dfrac{g(t)}{1+e^t}$ ως πράξεις συνεχών.

Οπότε το ολοκλήρωμα είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση, άρα συνεχής

Επομένως η φ είναι συνεχής στο [0, 1] σαν πράξεις συνεχών.

Είναι $\varphi(0) = -1 < 0$ **(1)** και $\varphi(1) = 1 - \int_0^1 \dfrac{g(t)}{1+e^t}dt$ **(2)**

Όμως $0 \le g(t) \le 1 \Rightarrow 0 \le \dfrac{g(t)}{1+e^t} \le \dfrac{1}{1+e^t} < 1$ **(3)**

Δηλαδή $\dfrac{g(t)}{1+e^t} - 1 < 0 \Rightarrow \int_0^1 \left(\dfrac{g(t)}{1+e^t} - 1\right)dt < 0$

$$\int_0^1 \frac{g(t)}{1+e^t}dt - \int_0^1 1dt < 0$$

$$\int_0^1 \frac{g(t)}{1+e^t}dt - 1 < 0$$

$$1 - \int_0^1 \frac{g(t)}{1+e^t}dt > 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \varphi(1) > 0 \quad \textbf{(4)}$$

(1).(4) $\Rightarrow \varphi(0)\,\varphi(1) < 0$, και επειδή η f είναι συνεχής στο [0, 1], από το Θεώρημα Bolzano θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ ώστε $\varphi(\xi) = 0$.

Όμως $\varphi'(x) = 2 - \dfrac{g(x)}{1+e^x} > 0$ λόγω της (3)

Επομένως η φ είναι γνησίως αύξουσα, άρα η ρίζα ξ είναι μοναδική.